

Sujet de thèse : domination ludique

Encadrant : Paul Dorbec¹

Thème Graphes et applications,
Équipe Combinatoire et Algorithmique
LaBRI, Université de Bordeaux - CNRS, France

La domination dans les graphes est un problème classique de théorie des graphes. On dit d'un sommet qu'il se domine lui-même et ses voisins. Une variante récente du problème a été proposée avec le jeu de domination [2]. Dans ce jeu, deux joueurs choisissent à tour de rôle un sommet du graphe qu'ils ajoutent à un ensemble S de sommets sélectionnés. Un sommet ne peut être choisi que s'il domine au moins un nouveau sommet. Dès lors que S est un ensemble dominant du graphe, aucun nouveau sommet ne peut être ajouté et le jeu s'achève. Les deux joueurs, Dominator et Staller, ont des objectifs opposés. Dominator cherche à minimiser le nombre de sommets dans S à la fin du jeu, tandis que Staller cherche à le maximiser. Le nombre de domination ludique $\gamma_g(G)$ d'un graphe G est le nombre de sommets choisis à la fin du jeu quand les deux joueurs ont appliqué une stratégie optimale et que Dominator a fait le premier mouvement. Lorsque Staller a fait le premier mouvement, un paramètre similaire est proposé, noté $\gamma'_g(G)$.

La nature de ce paramètre de graphe rend l'étude un peu différente de celle des paramètres classiques de graphes. En effet, pour prouver les résultats sur un graphe, il est nécessaire de décrire une stratégie pour les joueurs. Ceci complexifie un peu le problème et son analyse, mais fait apparaître des techniques de preuves plus proches de la théorie des jeux que de la théorie des graphes classiques.

L'un des problèmes les plus intéressants sur ce paramètre de graphe est la relation entre $\gamma_g(G)$ et $\gamma'_g(G)$. Il a été prouvé que ces deux valeurs diffèrent d'au plus un [2, 7], et que cette différence peut avoir lieu dans les deux sens. Aucune caractérisation des graphes atteignant telle ou telle différence entre les paramètres n'existe à ce jour, bien que plusieurs travaux publiés vont dans ce sens [6, 7].

Un autre problème pertinent pour ce paramètre est de trouver des bornes selon les classes de graphes. Il est conjecturé que le nombre de domination ludique de tout graphe sans sommet isolé est au plus $\frac{3n}{5}$ où n est l'ordre du graphe. La conjecture a aussi été proposée pour la classe des forêts sans sommet isolé, mais n'a pas été résolue, malgré quelques résultats partiels [4, 5].

Références

- [1] B. Brešar, P. Dorbec, S. Klavžar, and G. Košmrlj, Domination game : effect of edge- and vertex-removal, submitted, available on arXiv :1307.5378.
- [2] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall, Domination game and an imagination strategy, SIAM J. Discrete Math. 24 (2010) 979–991.

1. paul.dorbec@labri.fr

- [3] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall, Domination game played on trees and spanning subgraphs, *Discrete Math.* 313 (2013) 915–923.
- [4] B. Brešar, S. Klavžar, G. Košmrlj, D. F. Rall, Domination game : extremal families of graphs for the 3/5-conjectures, *Discrete Appl. Math.* 161 (2013) 1308–1316.
- [5] Cs. Bujtás, Domination game on trees without leaves at distance four, *Proceedings of the 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications* (A. Frank, A. Recski, G. Wiener, eds.), June 4–7, 2013, Veszprém, Hungary, 73–78.
- [6] P. Dorbec, G. Košmrlj and G. Renault, The domination game played on unions of graphs, submitted.
- [7] W. B. Kinnersley, D. B. West, R. Zamani, Extremal problems for game domination number, *SIAM J. Discrete Math.*, 27(4) (2013), 2090–2107.